Lista zagadnień omawianych na wykładzie w dn. 20.11.2026r. :

Przykład 1. Granice podstawowych funkcji

a)	$\lim\limits_{x\to x_0} x^a = x_0^a$, gdzie $a, x_0 > 0$
b)	$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$
c)	$\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, gdzie $a, x_0 > 0$
d)	$\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, gdzie $a, x_0 > 0, a \neq 1$
e)	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

Uzasadnienie.

a) Przypadek $x \to x_0+$. Metoda dowodu nie wprost (a contrario). Załóżmy, przeciwnie, że $x^a \not\to x_0^a$. Wtedy istnieje ciąg (x_n) taki, że $x_n \to x_0+$ i $x_n^a \not\to x_0^a$, gdy $n \to \infty$. Z drugiego warunku wynika, że istnieje taki $\epsilon > 0$, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n^a) jest poza przedziałem $(x_0^a, x_0^a + \epsilon)$ inaczej, dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $x_0^a < x_0^a + \epsilon < x_n^a$ lub równoważnie

$$x_0 < (x_0^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}} < x_n$$

dla nieskończenie wielu n. Ostatnia nierówność jest sprzeczna z założeniem, że $x_n \to x_0+$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Przypadek $x \to x_0-$, sprowadzamy do rozpatrzonego wyżej zauważając, że wtedy $\frac{1}{x} \to \frac{1}{x_0}+$ i stąd

$$\frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a \to \left(\frac{1}{x_0}\right)^a = \frac{1}{x_0^a},$$

czyli $x^a \to x_0^a$ również w tym przypadku.

b) Przypadek $x \to 0+$. Wykorzystamy nierówność

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \mathrm{tg} x$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Z twierdzenia o trzech funkcjach zastosowanego do nierówności $0 \leq \sin x \leq x$ wynika, że

$$\lim_{x\to 0+} \sin x = 0$$

Przypadek $x \to 0-$ sprowadzamy do wcześniejszego przyjmując $y = -x$. Wtedy $\sin x = -\sin y$ i $y \to 0+$, więc

$$\lim_{x\to 0-} \sin x = -\lim_{y\to 0+} \sin y = 0.$$

Dla $\cos x$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0+} \cos x = \lim_{x\to 0+} \sqrt{1-\sin^2 x} = 1 = \cos 0$$

Ogólny przypadek dla $\sin x$ sprowadzimy do już rozpatrzonego korzystając ze wzoru trygonometrycznago

$$\sin x = \sin[(x - x_0) + x_0] = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \sin x_0 \cos(x - x_0)$$

Przyjmując $y = x - x_0$, otrzymujemy

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \cos x_0 \lim_{y\to 0} \sin y + \sin x_0 \lim_{y\to 0} \cos y = \sin x_0,$$

co należało udowodnić.
W przypadku funkcji $\cos x$ skorzystamy ze wzoru $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

c) Przypadek $a > 1$, $x \to 0+$. Pamiętamy, że

(1) $$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Niech $\epsilon > 0$ i $x_n \to 0+$, tzn.

(2) $$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad x_n > 0$$

Wtedy z (1) wynika, że istnieje $n_1 > 0$ takie, że

(3) $$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon, \text{ dla } n \geq n_1,$$

Podobnie z (2) wynika, że istnieje $n_0 > 0$ takie, że

(4) $$0 < x_n < \frac{1}{n_1}, \text{ dla } n > n_0$$

Ponieważ funkcja a^x, $a > 1$ jest niemalejąca dla $x > 0$, z nierówności (3) i (4) wynika, że

$$1 < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_1}} < 1 + \epsilon, \text{ inaczej } |a^{x_n} - 1| < \epsilon \text{ dla } n > \max\{n_0, n_1\},$$

co oznacza, że ciąg $a^{x_n} \to 1$, dowodzi to prawdziwości tej częsci twierdzenia.

W przypadku ogólnym, gdy $x \to x_0+$, zauważamy na wstępie, że $a^x = a^{x_0}a^{x-x_0} = a^{x_0}a^y$, gdzie $y = x - x_0 \to 0+$. Teraz możemy skorzystać z rozpatrzonego już przypadku.

Przypadek $a > 1$, $x \to x_0-$. Zauważamy, że

$$\lim_{x\to x_0-} a^x = \lim_{x\to x_0-} \left(a^{x_0} \cdot \frac{1}{a^{x_0-x}} \right) = a^{x_0} \lim_{y\to 0+} \frac{1}{a^y}$$

Przypadek $0 < a < 1$, $x \to x_0$. Zauważamy, że

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}} = a^{x_0}$$

d) Przypadek $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(1+x) = 0$. Udowodnimy najpierw nierówność

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}, \text{ dla } n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Uzasadnienie. Pamiętamy, że ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{6}$$

jest niemalejący i $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$, stąd

$$1 < e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

i po zlogarytmowaniu (funkcja ln jest rosnąca!) otrzymujemy

$$0 < \ln e_n < n \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1,$$

Stąd już wynika (5).

Niech $x_n \to 0+$ i niech $\epsilon > 0$. Wtedy istnieją $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$
$$0 < x_n < \frac{1}{n_0}, \text{ dla } n > n_1$$

Stąd otrzymujemy

$$0 < \ln(1+x_n) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{n_0} < \epsilon, \text{ dla } n > \max\{n_0, n_1\},$$

co oznacza, że $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(1+x) = 0$.

Przypadek $\lim\limits_{x\to 0-} \ln(1+x) = 0$. Zauważamy, że

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-x}{1+x} = 1+z, \text{ gdzie } z = \frac{-x}{1+x}$$

i

$$x \to 0- \;\Rightarrow\; z \to 0+.$$

W ten sposób

$$\lim_{x\to 0-} \ln(1+x) = -\lim_{x\to 0-} \ln\frac{1}{1+x} = -\lim_{z\to 0+} \ln(1+z) = 0.$$

Przechodzimy do uzasadnienia granic

(7) $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$

(8) $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$

Granicę (7) otrzymamy zauważając, że

$$\ln x = \ln x_0 \cdot \frac{x}{x_0} = \ln x_0 + \ln(1+y), \text{ gdzie } y = \frac{x}{x_0} - 1$$
$$\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0 + \lim_{y\to 0} \ln(1+y) = \ln x_0$$

Granicę (8) otrzymamy zuważając, że

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e) Na początku rozpatrzymy przypadek $x \to 0+$. Zaczniemy od udowodnienia następującego faktu

Fakt 1. Niech m_n będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$$

Uwaga. Podane stwierdzenie nabiera podstawowego znaczenia w sytuacji, gdy ciąg m_n nie jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $\{n\}$. W tym drugim przypadku wystarczy powołać się na twierdzenie, że każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do granicy ciągu. Np. w przypadku ciągu $m_n = n^2$ wystarczy powołać się na twierdzenie o granicy podciągu, natomiast w przypadku ciągu $\{m_n\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$, który nie jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ nie możemy się powołać na to twierdzenie.

Mamy wykazać, że zdanie

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \left| \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e \right| < \epsilon$$

jest prawdziwe. Wcześniej był badany ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dla którego otrzymaliśmy

1. ciąg e_n jest ograniczony, $1 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$
2. ciąg e_n jest niemalejący, $e_n \leq e_m$, $\bigwedge n \leq m,\ n, m \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$

Niech $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje n_1 takie, że dla $n > n_1$ zachodzi

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \epsilon, \ \bigwedge n \geq n_1$$

Ponieważ $m_n \to \infty$, istnieje n_0 takie, że $m_n > n_1$ dla $n > n_0$. Wtedy dla $n > n_0$ otrzymujemy

$$\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \leq e$$

stąd

$$\left| \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e \right| \leq \left| \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1} - e \right| < \epsilon, \ \bigwedge n > \max\{n_0, n_1\},$$

co dowodzi prawdziwości naszego faktu.
Przechodzimy do dowodu właściwej granicy. Niech $x_n \to \infty$. Zachodzą nierówności

$$[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$$

dla przypomnienia, $[x_n]$ jest częścią całkowitą x. Stąd otrzymujemy oszacowania

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

Dla ciągów skrajnych w tych nierównosciach mamy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)}$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)$$

Do obliczenia granic ciągów a_n i b_n zastosujemy **Fakt 8** otrzymując

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$$

Teraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

co kończy tę część dowodu.

Przypadek $x \to 0-$ sprowadzimy do już rozpatrzonego. Niech $y = -x$. Wtedy

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Przyjmujemy $z = \frac{y}{1-y}$, $y = \frac{z}{z+1}$, stąd

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{z+1}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że jeśli $x \to 0-$, to $z \to 0+$ i skorzystać z granicy funkcji $f(z)^{g(z)}$, gdzie

$$f(z) = (1+z)^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = z+1$$
$$\lim_{z\to 0+} f(z) = e, \quad \lim_{z\to 0+} g(z) = 1$$

Wyrażenia nieoznaczone

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^{∞}	∞^0	0^0

Uwaga. Symbole nieoznaczone W takich przypadkach wyznaczenie granicy wymaga bardziej szczegółowych rozważań.

Przykład 2. Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

a)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	b)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
c)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc}\sin x}{x} = 1$	d)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
e)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$	f)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1$
g)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	h)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, gdzie $0 < a \neq 1$
i)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	j)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, gdzie $a > 0$
k)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	l)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$
m)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$		

Uzasadnienie. Wskazówki :

Przypadek g). Zauważamy, że

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e, \text{ gdy } x \to 0$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln y$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to e} \ln y = \ln e = 1.$$

Przypadek h). Zauważamy, że

$$(1+x) = a^{\log_a(1+x)},$$
$$\ln(1+x) = \ln a \cdot \log_a(1+x)$$
$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Przypadek i). Przyjmujemy $y = e^x - 1, \;\; x = \ln(1+y)$ i zauważamy, że

$$\text{jeśli } x \to 0, \text{to } y \to 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Przypadek j). Zauważamy, że

$$a^x = e^{x \ln a}$$
$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a, \text{gdzie } y = x \ln a$$

Przypadek k). Przyjmujemy $y = \frac{1}{x}$ i zauważamy, że jeśli $x \to \pm\infty$, to $y \to 0$. W końcu

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Przypadek l). Przyjmujemy $y = \frac{a}{x}$. Zauważamy, że

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^a = e^a.$$

Przypadek m).

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{e^{a\ln(1+x)} - 1}{a\ln(1+x)} \cdot \frac{a\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot a = a$$

Przykład 3. Korzystając z granic wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}$	*b)*	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$	*c)*	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$
d)	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$	*e)*	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-7}\right)^{x^2}$	*f)*	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{2x-1}$
g)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}$	*h)*	$\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x \operatorname{ctg} 5x$	*i)*	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$
j)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[6]{1+x^5} - 1}{x}$	*k)*	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[7]{3-x} - 1}{\sin \pi x}$	*l)*	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\pi - (1-x)^\pi}{x}$
m)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$	*n)*	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)}$	*o)*	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$

Wskazówki.

Przykład a)

$$\frac{\sin 7x}{\sin 5x} = \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{7x}{5x} \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \quad \frac{7}{5}$$

Przykład b)

$$\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{x}{2x}\quad\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad\frac{1}{2}$$

Przykład c)

$$\frac{3^x-2^x}{x}=\frac{e^{x\ln 3}-e^{x\ln 2}}{x}=\left(\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\ln 3-\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\ln 2\right)$$
$$\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad\ln 3-\ln 2.$$

Przykład d)

$$\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}=\frac{1}{\left(\frac{3x+7}{3x+5}\right)^{x+1}}$$
$$\left(\frac{3x+7}{3x+5}\right)^{x+1}=\left(\left(1+\frac{2}{3x+5}\right)^{\frac{3x+5}{2}}\right)^{\frac{2(x+1)}{3x+5}}$$
$$\left(1+\frac{2}{3x+5}\right)^{\frac{3x+5}{2}}\quad\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\quad e,\quad\frac{2(x+1)}{3x+5}\quad\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}=\frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

Przykład g)

$$\frac{\ln(1-2x^3)}{x^3}=-2\frac{\ln(1-2x^3)}{-2x^3}\quad\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad-2$$

Przykład h)

$$\sin 3x\operatorname{ctg}5x=\sin 3x\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=$$
$$\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\quad\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\quad\frac{3}{5}$$

Przykład i)

$$\frac{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{\cos\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\quad\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1\cdot 1\cdot\infty=\infty$$

Przykład j)

$$\frac{\sqrt[6]{1+x^5}-1}{x}=\frac{e^{\frac{1}{6}\ln(1+x^5)}-1}{\frac{1}{6}\ln(1+x^5)}\cdot\frac{\frac{1}{6}\ln(1+x^5)}{x^5}\cdot\frac{x^5}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1\cdot\frac{1}{6}\cdot 0=0$$

Przykład k). Za pomocą kolejnych podstawień $y = 3 - x$ i $y = 1 + z$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\frac{\sqrt[7]{3-x}-1}{\sin \pi x} = \frac{\sqrt[7]{y}-1}{\sin \pi(3-y)} =$$
$$\frac{\sqrt[7]{y}-1}{\sin \pi y} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{7}}-1}{z} \cdot \frac{z}{-\sin \pi z} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{7}}-1}{z} \cdot \frac{\pi z}{\sin \pi z} \cdot \frac{-1}{\pi}$$

Przykład l)

$$\frac{(1+x)^\pi - (1-x)^\pi}{x} = \frac{e^{\pi \ln(1+x)} - e^{\pi \ln(1-x)}}{x} =$$
$$\frac{e^{\pi \ln(1+x)}-1}{\pi \ln(1+x)} \cdot \frac{\pi \ln(1+x)}{x} - \frac{e^{\pi \ln(1-x)}-1}{\pi \ln(1-x)} \cdot \frac{\pi \ln(1-x)}{x}$$

$$\frac{e^{\pi \ln(1+x)}-1}{\pi \ln(1+x)} \cdot \frac{\pi \ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \cdot \pi = \pi$$

$$\frac{e^{\pi \ln(1-x)}-1}{\pi \ln(1-x)} \cdot \frac{\pi \ln(1-x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \cdot \pi \cdot (-1) = -\pi$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\pi - (1-x)^\pi}{x} = \pi - (-\pi) = 2\pi.$$

Przykład o). Zauważamy, że $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2(1 - \cos^2 \frac{x}{2})$. Za pomocą kolejnych podstawień $y = 2(1 - \cos^2 \frac{x}{2}) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ i $z = -y$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{\ln(1-y)}{-y} \cdot \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$
$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1+z)}{z} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2}\right)^2$$

Przykład n). Za pomocą podstawienia $x = \frac{\pi}{2} + y$ i kolejnych prekształceń doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)} = \frac{\ln(1-\sin y)}{\ln(1+\sin 3y)} =$$
$$\frac{\ln(1-\sin y)}{-\sin y} \cdot \frac{-\sin y}{\sin 3y} \cdot \frac{\sin 3y}{\ln(1+\sin 3y)} =$$
$$\frac{\ln(1-\sin y)}{-\sin y} \cdot \frac{-\sin y}{y} \cdot \frac{3y}{\sin 3y} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3y}{\ln(1+\sin 3y)}$$

Funkcje ciągłe

Def. (ciągłość w $a \in \mathbb{R}$) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Używając sformułowania Cauchy'ego pojęcia granicy, ciągłość funkcji można wyrazić następująco:

Tw. (definicja Cauchy'ego) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a, jeśli

$$(\bigwedge \epsilon > 0)\,(\bigvee \delta > 0)\,(\bigwedge x)\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Używając sformułowania Heinego pojęcia granicy, ciągłość funkcji można wyrazić następująco:

Tw. (definicja Heinego) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a, jeśli

$$(\bigwedge (x_n))\,(\bigvee \delta > 0)\,(\bigwedge x)\ \left(\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)\right)$$

Def. (ciągłość w zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$). Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w A, jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.

Przykład 4. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ dla } x_0 \in (a, b)$$
$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \ \lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

Podstawowe własności funkcji ciągłych

1. Suma, różnica, iloczyn oraz iloraz dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
2. Wszystkie wielomiany są ciągłe.
3. Jeśli f jest ciągła, to również $|f|$ jest ciągła.
4. Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.

Przykład 5. Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych ($f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$) nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład 6. Rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie a:

1. nieciągłość typu skoku (I rodzaju) - istnieją granice jednostronne funkcji $f(x)$, przy czym

$$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$$

2. nieciągłość II rodzaju - nie istnieje co najmniej jedna granica jednostronna.