Wykład

Omawiane zagadnienia

Funkcje ciągłe

Def. (ciągłość w $a \in \mathbb{R}$) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Używając sformułowania Cauchy'ego pojęcia granicy, ciągłość funkcji można wyrazić następująco:

Tw. (definicja Cauchy'ego) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a, jeśli

$$(\bigwedge \epsilon > 0)\,(\bigvee \delta > 0)\,(\bigwedge x)\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Używając sformułowania Heinego pojęcia granicy, ciągłość funkcji można wyrazić następująco:

Tw. (definicja Heinego) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a, jeśli

$$(\bigwedge (x_n))\,(\bigvee \delta > 0)\,(\bigwedge x)\ \left(\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)\right)$$

Def. (ciągłość w zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$). Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w A, jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.

Przykład 1. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ dla } x_0 \in (a, b)$$
$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \ \lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

Podstawowe własności funkcji ciągłych

1. Suma, różnica, iloczyn oraz iloraz dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
2. Wszystkie wielomiany są ciągłe.
3. Jeśli f jest ciągła, to również $|f|$ jest ciągła.
4. Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.

Przykład 2. Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych ($f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$) nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład 3. Rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie a:
1. nieciągłość typu skoku (I rodzaju) - istnieją granice jednostronne funkcji $f(x)$, przy czym

$$\lim_{x\to a-} f(x) \neq \lim_{x\to a+} f(x)$$

2. nieciągłość II rodzaju - nie istnieje co najmniej jedna granica jednostronna.

Twierdzenie. (Weierstrassa) Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $x_1, x_2 \in [a, b]$ takie, że $f(x_1) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ i $f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, tzn. $f(x)$ przyjmuje w swoją najmniejszą i największą wartość.

Wniosek. Każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ jest ograniczona.

Twierdzenie. (Darboux, o przyjmowaniu wartości pośredniej) Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(a) \leq y \leq f(b)$ (lub $f(b) \leq y \leq f(a)$, to istnieje $x \in [a, b]$ taki, że $y = f(x)$.

Wniosek. Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(a) < 0 < f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.

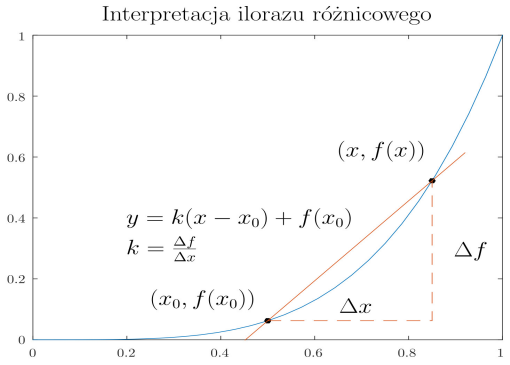
Przykład 4. Każdy wielomian $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ma miejsce zerowe. Podobnie każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie. Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i rosnąca (lub malejąca), to $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$ dla pewnych α, β (tzn. obraz odcinka $[a, b]$ jest odcinkiem $[\alpha, \beta]$ oraz funkcja odwrotna $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ jest ciągła.

Pochodna funkcji

Definicja (iloraz różnicowy) Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmnniej na pewnym otoczeniu $O(x_0)$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi $\Delta x \neq 0$ zmiennej niezależnej x nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Definicja (pochodna właściwa). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na pewnym otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

inaczej

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Uwaga (oznaczenia pochodnej).

$$\frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0), \quad f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0).$$

Twierdzenia o pochodnej funkcji.

Twierdzenie (o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji). Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie c jest stałą;
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
3. $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
5. $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$;

Twierdzenie (o pochodnej funkcji złożonej). Jeżeli

1. funkcja f ma pochodna właściwą w punkcie x_0;
2. funcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,

to $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Uwaga. Prawdziwy jest analogiczny wzór dla dowolnej liczby składanych funkcji oraz dla pochodnych jednostronnych, a także dla pochodnych niewłaściwych.

Przykład 5. Obliczyć pochodną funkcji $h(x) = \sin(\mathrm{tg}(\cos x))$.

$$h'(x) = (\sin)'(\mathrm{tg}(\cos x)) \cdot (tg)'(\cos x) \cdot (\cos x)' =$$

$$\cos(\mathrm{tg}(\sin x)) \cdot \frac{1}{\cos^2(\cos x)} \cdot (-\sin x)$$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej). Jeżeli funkcja f spełnia następujące warunki

1. jest ciągła na pewnym otoczeniu $O(x_0)$,
2. jest ściśle monotoniczna na otoczeniu $O(x_0)$,
3. ma pochodną właściwą $f(x_0) \neq 0$,

to $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, gdzie $y_0 = f(x_0)$.

Uwaga. Wzór ten jest prawdziwy także dla pochodnych niewłaściwych i jednostronnych.

Pochodne wybranych funkcji elementarnych

$(c)' = 0$, gdzie $c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$, dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$
$(x^p)' = px^{p-1}$, dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$, gdzie $p \in \{-1, -2, -3, \dots\}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, dla $x > 0$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$
$(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$(\mathrm{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - c\mathrm{tg}^2 x$ dla $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$(e^x)' = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a$ dla $0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(\sinh x)' = \cosh x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\cosh x)' = \sinh x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\mathrm{ctgh}\, x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych - c. d.

$(\operatorname{arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ dla $x \in (-1,1)$
$(\operatorname{arc}\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$ dla $x \in (-1,1)$
$(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$ dla $0 < a \neq 1$ oraz $x \in (0,\infty)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x},$ dla $x \in (0,\infty)$

Przykład 6. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\cos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Przykład 7. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \log_x(x^2+1)$

$$1)\ \log_x(x^2+1) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$$

$$2)\ \frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{1}{\ln(x^2+1)} \cdot (2x) = \frac{2x}{\ln(x^2+1)}$$

$$3)\ \frac{d}{dx}\frac{1}{\ln x} = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln x}$$

$$f'(x) = (\log_x(x^2+1))' = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x}\right)' =$$

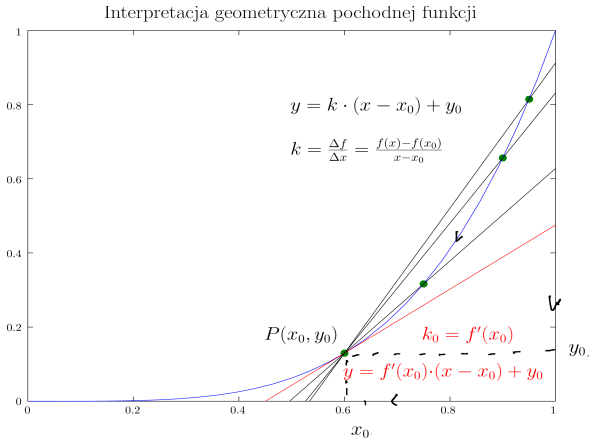
$$\left(\ln(x^2+1) \cdot \frac{1}{\ln x}\right)' = \big(\ln(x^2+1)\big)' \cdot \frac{1}{\ln x} + \ln(x^2+1) \cdot \left(\frac{1}{\ln x}\right)' =$$

$$\frac{2x}{\ln(x^2+1)} \cdot \frac{1}{\ln x} + \ln(x^2+1) \cdot \frac{-1}{x \ln x} =$$

$$\frac{2x}{(\ln(x^2+1))\ln x} - \frac{\ln(x^2+1)}{x \ln x}$$

Definicja (styczna do wykresu funkcji). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz funkcja ciągła f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych wykresu funkcji f przechodzących przez punkty $S = (x_0, f(x_0))$ i $P = (x, f(x))$, gdy $x \to x_0$.

Interpretacja geometryczna pochodnej



$$x \to x_0 \ (\Rightarrow f(x) \to f(x_0))$$

Fakt (równanie stycznej do wykresu funkcji). Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Definicja (kąt przecięcia wykresów funkcji). Niech wykresy funkcji f i g mają punkt wspólny (x_0, y_0), przy czym obie funkcje mają pochodne właściwe w punkcie x_0. Kątem przecięcia wykresów funkcji f i g nazywamy kąt ostry ϕ między stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie ich przecięcia.

Fakt (o mierze kąta między wykresmi funkcji). Miarę kąta przecięcia wykresów funkcji f i g można wyznaczyć ze wzoru

$$\mathrm{tg}\phi = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|$$

gdzie x_0 jest rzędną punktu przecięcia wykresów. Jeżeli $f'(x_0)g'(x_0) = -1$ przyjmujemy, że $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Definicja (pochodne jednostronne funkcji). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0-)$. Pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogicznie definuje się pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0. Pochodną taką oznaczamy przez $f'_+(x_0)$.

Uwaga. Jeżeli funkcja ma w punkcie pochodną lewostronną (prawostronną), to jest w tym punkcie lewostronnie (prawostronnie) ciągła.

Interpretacja geometryczna pochodnych jednostronnych.

Twierdzenie (warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej). Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Jeżeli pochodne jednostronne są równe, to ich wspólna wartość jest pochodną.

Definicja (pochodna funkcji w przedziale, funkcja różniczkowalna). Funkcja ma pochodną na przedziale otwartym (a, b), jeżeli ma taką pochodną w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja ma pochodną na przedziale domknietym $[a, b]$, jeżeli ma taką pochodną w każdym punkcie przedziału otwartego oraz prawostronną pochodną w punkcie a i lewostronną pochodną w punkcie b. Analogicznie definiujemy pochodną funkcji na przedziałach $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$. Funkcję określoną na przedziale, której wartości w punktach x tego przedziału są równe $f'(x)$, nazywamy pochodną funkcji f na przedziale i oznaczamy przez f' lub $\frac{df}{dx}$ albo $\dot{f}$. O funkcji, która ma pochodną właściwą w każdym punkcie przedziału, mówimy, że jest różniczkowalna.

Definicja (pochodna niewłaściwa funkcji). Niech f będzie funkcją ciągłą w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłasciwą wtedy i tylko wtedy, gdy granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty \text{ lub } -\infty, \quad f'(x_0) = \infty \ (-\infty)$$

Uwaga. W podobny sposób definiuje się pochodne niewłaściwe jednostronne. Pochodne te oznacza się tym samym symbolem co pochodne jednostronne właściwe: np. $f'_-(x_0) = \infty$.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji). Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

Uzasadnienie.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

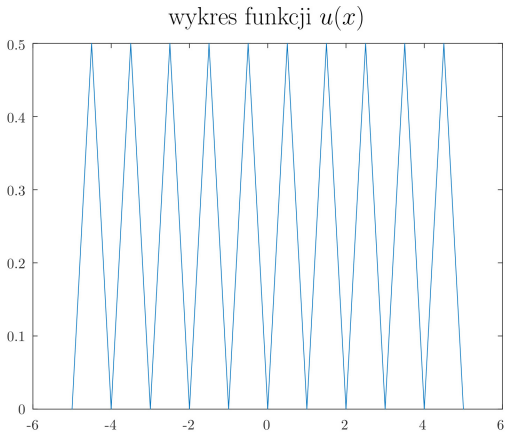
Uwaga. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale $f'(0)$ nie istnieje.

Interpretacja fizyczna pochodnej. Prędkość $v(t) = s'(t)$, przyspieszenie $a(t) = v'(t)$, natężenie prądu $i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$.

Przykład 8. (Van der Waerden). Funkcja, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(4^n x)}{4^n},$$

gdzie $u(x) = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\}$ ($\lfloor x \rfloor$ - część całkowita liczby x) oznacza odległość punktu x od najbliższej liczby całkowitej.



Uwaga. Pochodna funkcji na przedziale nie musi być ciągła. Np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma pochodną

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Jednakże pochodna ta nie jest ciągła w punkcie 0. Można pokazać, że pochodna dowolnej funkcji może mieć jedynie nieciągłości drugiego rodzaju, jednocześnie pochodna funkcji ma własność Darboux, tzn. przyjmuje wartości pośrednie.

Definicja (różniczka funkcji) Niech funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0. Różniczką funkcji f nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Twierdzenie (zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych). Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Przy czym błąd, jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż Δx, tzn.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = 0.$$

Uwaga. Funkcję liniową $y = a(x - x_0) + b$, gdzie $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0)$, nazywamy liniową aproksymacją funkcji f w otoczeniu punktu x_0. Wykres funkcji liniowej jest styczną wykresu funnkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Przykład 9. Za pomocą różniczki oblicz przybliżoną wartość wyrażenia

a) $e^{-0.001}$, b) $\frac{1}{0.9996^3}$.

Twierdzenie (zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów). Niech wielkości fizyczne będą powiązane zależnością $y = f(x)$, przy czym pochodna $f'(x_0)$, gdzie x_0 jest wynikiem pomiaru jest właściwa. Ponadto niech Δx oznacza błąd bezwzględny pomiaru wielkości x. Wtedy błąd bezwzględny Δy obliczanej wielkości y wyraża się wzorem przybliżonym $\Delta y \approx |f'(x_0)|\Delta x$.

Pochodne wyższych rzędów

Definicja (pochodna n-tego rzędu funkcji). Pochodną n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0) \text{ dla } n \geq 2,$$

gdzie $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$. Ponadto przyjmujemy $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.
Oznaczenia $\frac{d^n f}{dx^n}$, $D^n f$, $f^{(n)}$, przy czym piszemy f' zamiast $f^{(1)}$, f'' zamiast $f^{(2)}$,...

Twierdzenie (wzór Leibniza). Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe n-tego rzędu w punkcie x_0, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$

Definicja (pochodna funkcji wektorowej). Niech

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \text{ gdzie } t \in [\alpha, \beta]$$

będzie funkcją wektorową. Pochodną funkcji $\vec{r}$ w punkcie t określamy wzorem:

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Podobnie określamy pochodną funkcji wektorowej
$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, a także pochodne wyższych rzędów takich funkcji.