Lista zagadnień omawianych na wykładzie w dn. 6.11.2026r. :

Granica funkcji

Definicja (sąsiedztwo punktu)

1. Sąsiedztwo $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$: $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) \backslash \{x_0\}$
2. Sąsiedztwo lewostronne $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$:
   $S(x_0^-, r) = (x_0 - r, x_0)$
3. Sąsiedztwo prawostronne $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$:
   $S(x_0^+, r) = (x_0, x_0 + r)$

   Uwaga. Jeżeli w rozważaniach wartość $r > 0$ nie jest istotna, piszemy krótko: $S(x_0)$, $S(x_0^-)$, lub $S(x_0^+)$.
4. Sąsiedztwo $-\infty$: każdy zbiór postaci $S(-\infty) = (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$
5. Sąsiedztwo ∞: każdy zbiór postaci $S(\infty) = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$

Niech a i A oznaczają symbole

a				
x_0	x_0^-	x_0^+	$-\infty$	∞

A		
g	$-\infty$	∞

Definicja. (granicy funkcji w punkcie w sensie Heinego)
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na pewnym sąsiedztwie $S(a)$. Mówimy, że f ma granicę A, gdy $x \to a$, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{\{x_n\} \\ \{x_n\} \subset S(a)}} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = a \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A \right) \right]$$

W przypadku

1. $a = x_0$, $A = g$ mówimy o granicy właściwej funkcji w punkcie a
2. $a = x_0^-$, $A = g$ mówimy o granicy właściwej lewostronnej funkcji w punkcie a, piszemy w skrócie $f(x_0^-)$
3. $a = x_0^+$, $A = g$ mówimy o granicy właściwej prawostronnej funkcji w punkcie a, piszemy w skrócie $f(x_0^+)$

4. $A = -\infty$ lub ∞ mówimy odpowiednio o granicy niewłaściwej

5. $a = -\infty$ lub ∞, $A = g$ mówimy o granicy funkcji w $-\infty(\infty)$

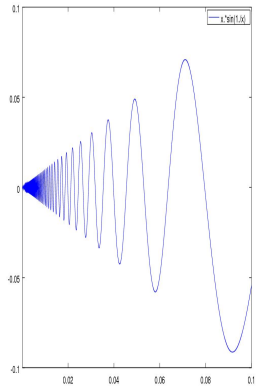
Przykład 1.
Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Wtedy

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Uzasadnienie. Niech $x_n \to 0$. Ponieważ $f(x_n) = x_n \sin 1/x_n$, wystarczy zauważyć, że ciąg $\sin 1/x_n$ jest ograniczony. W takim przypadku $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, co należało udowodnić.



rys. 1. $y = x \sin 1/x$

Twierdzenie 1 *(o nieistnieniu granicy funkcji w punkcie x_0)* Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Jeżeli istnieją ciągi $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ spełniające warunki:

1. $\lim_{n \to \infty} x'_n = x_0$, przy czym $x'_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

2. $\lim_{n \to \infty} x''_n = x_0$, przy czym $x''_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

3. $\lim_{n \to \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(x''_n)$,

to granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (właściwa ani niewłasciwa) nie istnieje.

Przykład 2.

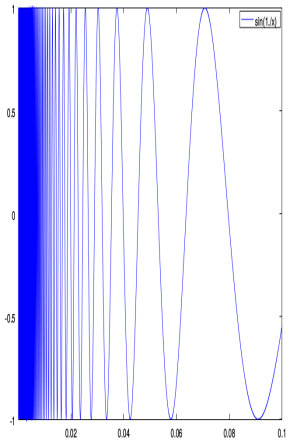
Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Wtedy funkcja $f(x)$ nie ma granicy, $x \to 0$.
Uzasadnienie. Rozpatrzmy dwa ciągi

1. $x_n = \frac{1}{n\pi}$;
2. $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$

W przypadku 1. $f(x_n) = 0$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$, więc ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do 0. W przypadku 2. $f(x_n) = 1$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$, więc ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do 1.
Te spostrzeżenia oznaczają, że $f(x)$ nie ma granicy, gdy $x \to 0$.



rys. 2. $y = \sin 1/x$

Twierdzenie 2 *(o nieistnieniu granicy funkcji w nieskończoności)* Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Jeżeli istnieją ciągi $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ spełniające warunki:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \infty$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$,

to granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (właściwa ani niewłasciwa) nie istnieje.

Twierdzenie 3 *(warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)* Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę (włściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Twierdzenie 4 *(o arytmetyce granic)* Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,
5. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$,

Twierdzenie 5 *(o granicy funkcji złożonej)* Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. istnieje granica: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$,
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
3. istnieje granica: $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = q$,

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = q$.

Uwaga. Założenie 2. przyjęto, bo w ogólnym przypadku funkcja $g(y)$ nie musi być określona w y_0.

Twierdzenie 6 *(o trzech funkcjach)* Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = p$,

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = p$.

Twierdzenie 7 *(o dwóch funkcjach)* Jeżeli funkcje f, g spełniają warunki:

1. $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$,

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Uwaga. Twierdzenie o dwóch funkcjach jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w nieskończonności. Ponadto prawdziwe są analogiczne twierdzenia dla granicy niewłaściwej funkcji równej $-\infty$.

Asymptoty wykresu funkcji $y = f(x)$
Asymptotą ukośną wykresu funkcji $y = f(x)$ nazywamy prostą $y = ax + b$ spełniającą warunek:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax - b] = 0,$$

lub

$$\lim_{x\to infty}[f(x) - ax - b] = 0.$$

Jeżeli taka asymptota istnieje, to parametry a i b wyznaczamy w następujący sposób

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$$

lub

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$$

Uwaga: jeżeli $a = 0$, to asymptotę nazywamy asymptotą poziomą.
Niech funkcja $y = f(x)$ ma niewłaściwą granicę jednostronną w punkcie x_0, np.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty,$$

to wtedy prostą pionową $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0.