Lista nr 5 (Pochodna funkcji)

Zadanie 1. Korzystając z definicji oblicz pochodne funkcji:

$a)\ f(x) = x^4,$ $b)\ f(x) = \frac{1}{x-1},\ (x \neq 1)$
$c)\ f(x) = \sqrt{x},\ (x > 0)$ $d)\ f(x) = \sin 2x,\ (x \in \mathbb{R}).$

Zadanie 2. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnij, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$a)\ f(x) = |x^2 - x|,\ x_0 = 1,$ $b)\ f(x) = (\sin x) \cdot \mathrm{sign}(x),\ x_0 = 0;$
$c)\ f(x) = \min\{x^2, 4\},\ x_0 = 2.$

Naszkicuj wykresy tych funkcji.

Zadanie 3. Korzystając z reguł różniczkowania oblicz pochodne funkcji:

$a)\ 3\sin x + \cot x,$ $b)\ e^x(x^2 - x + 1)$ $c)\ \frac{x^2+2}{x-2},$
$d)\ e^{-x}(3x+1)^2$ $e)\ e^{1/x}\mathrm{arctg}(3-x),$ $f)\ \ln(x^2+1)\mathrm{tg}\sqrt{x}$
$g)\ \ln(\cos^2 x + 1),$ $h)\ \sqrt{\arccos(x^2)}$ $i)\ \frac{\sqrt{5}}{(x^2+1)^3},$
$j)\ \frac{3^{\sin^2 x}}{2^{\cos^2 x}}.$

Zadanie 4. Napisz równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

$a)\ f(x) = \mathrm{arctg}x,\ (1, f(1))$ $b)\ f(x) = \ln(x^2 + e),\ (0, f(0)).$

Zadanie 5. a) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.
b) Wyznacz styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\pi/4$ z osią Ox.
c) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.
d) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.
e) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy.

Zadanie 6. Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej oblicz $(f^{-1})'(y_0)$, jeżeli:

$a)\ f(x) = x + \ln x,\ y_0 = e + 1,$ $b)\ f(x) = \cos x - 3x,\ y_0 = 1$
$c)\ f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x},\ y_0 = 1$ $d)\ f(x) = x^3 + 3x,\ y_0 = 4.$

Zadanie 7. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granice:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2^x+1)}{x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\mathrm{arctg}x}{x^2}$, $c)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(\sin\frac{\pi}{2}x)}{\ln x}$,
$d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\mathrm{arcctg}x$, $e)\ \lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$, $f)\ \lim\limits_{x\to\pi-}(\pi-x)\mathrm{tg}\frac{x}{2}$,
$g)\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{1}{x^2}\right)$, $h)\ \lim\limits_{x\to 0-}\left(\frac{1}{x}-\mathrm{ctg}x\right)$, $i)\ \lim\limits_{x\to 0+}(-\ln x)^x$.

Zadanie 8. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:

$a)\ f(x)=x^3-30x^2+225x$, $b)\ f(x)=\sin x-\cos x$, $c)\ f(x)=4x+\frac{1}{x}$,
$d)\ f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$, $e)\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $f)\ f(x)=xe^{-3x}$,
$g)\ f(x)=x\ln^2 x$, $h)\ f(x)=\frac{x}{\ln x}$, $i)\ f(x)=2^{x+1}-4^x$.

Zadanie 9. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$a)\ f(x)=4x^7-5x^3+2x$, $b)\ f(x)=x^3-\frac{2}{x}$, $c)\ f(x)=\frac{e^x}{x}$,
$d)\ f(x)=\mathrm{arctg}x$, $e)\ f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$, $f)\ f(x)=x^3\ln x$.

Zadanie 10. Znajdź ekstrema lokalne funkcji:

$a)\ f(x)=x^3-4x^2$, $b)\ f(x)=\frac{2^x}{x}$, $c)\ f(x)=x+\frac{1}{x}$,
$d)\ f(x)=(x+1)e^{-x}$, $e)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$, $f)\ f(x)=|x^2-5x-6|$,
$g)\ f(x)=x\ln x$, $h)\ f(x)=\sqrt{3x-x^3}$, $i)\ f(x)=2\mathrm{arctg}x-\ln(1+x^2)$.

Zadanie 11. Znajdź wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach lub w ich dziedzinach naturalnych:

$a)\ f(x)=2x^3-15x^2+36x$, $[1,5]$ $b)\ f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}$, $[-2,2]$,
$c)\ f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{9-x}$, $d)\ f(x)=(x-3)^2e^{|x|}$, $[-1,4]$,
$e)\ f(x)=1-|9-x^2|$, $[-5,1]$, $f)\ f(x)=\sin^3 x-6\sin x$, $[-\pi/2,\pi/2]$.

Zadanie 12. a) Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych - 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?
b) Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkata równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?

Zadanie 13. Zbadaj podane funkcje i następnie sporządź ich wykresy:

$a)\ f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $b)\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $c)\ f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.