Lista 03. Funkcje - wykresy, granica, ciągłość

Zadanie 1. . Pokaż, że $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$ oraz $\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}x$.

Zadanie 2. Korzystając ze wzorów

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x \text{ oraz } \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

wyprowadź wzory na $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$.

Zadanie 3. Narysuj, korzystając z przeglądarki Google, wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ oraz $g(x) = \cos^2 x$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

Zadanie 4. Naszkicuj wykresy funkcji $f_k(x) = \sqrt{1-x^2}\cdot\sin kx$ dla $k = 1, 2, 4, \ldots$.

Zadanie 5. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} - 1$ oraz $g(x) = |x| - \sqrt{1-x^2} - 1$.

Zadanie 6. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = (|x| + \sqrt{1-x^2} - 1)\cos^2 200x$ oraz $g(x) = (|x| - \sqrt{1-x^2} - 1)\cos^2 200x$.

Zadanie 7. Niech $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.
a) Wyznacz następujące granice: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$,
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 8. Niech

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

a) Pokaż, że funkcja sign nie jest ciągła w punkcie 0.
b) Wyznacz punkty ciągłości funkcji sign.

Zadanie 9. Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji:
$f_1(x) = \mathrm{sign}(\sin x)$, $f_2(x) = \mathrm{sign}(\cos x)$, $f_3(x) = \lfloor x\rfloor$, $f_4(x) = \lfloor\frac{1}{x}\rfloor$.

Zadanie 10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Zadanie 11. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji oblicz granice:

$$a)\ \lim_{x\to64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8};\quad b)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x};\quad c)\ \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x).$$

Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnij równości:

$$a)\ \lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0; \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x\sqrt{8}\rfloor}{\lfloor x\sqrt{2}\rfloor} = 2; \quad c)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}.$$

Zadanie 12. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych oblicz następujące granice:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}; \quad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x} = 2; \quad c)\ \lim_{x\to 0+} \frac{2^x-1}{4\sqrt{x}-1}; \quad d)\ \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}(2x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

Zadanie 13. Znajdź wszystkie asymptoty wykresu funkcji:

$$a)\ y = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}; \quad b)\ y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}; \quad c)\ y = \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

Zadanie 14. Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

$$y = \frac{x}{x-1}; \quad y = x - \lfloor x\rfloor; \quad y = x\sin\frac{1}{x}; \quad y = x^2\sin\frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x};$$

oraz wyznacz ich granice w punkcie $x = 0$.

Zadanie 15. Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

$$y = \frac{1}{x^2-1}, \quad y = \frac{x}{x^2-1}, \quad y = \frac{x^2}{x^2-1}, \quad y = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Zadanie 16. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. (Wsk: złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.)

Zadanie 17. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

Zadanie 18. Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + ... + a_1x + a_0$ w ∞ oraz w $-\infty$. (Wsk: Rozważ oddzielnie przypadek dla n parzystego oraz n nieparzystego.)

Zadanie 19. Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek. (Wsk: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własnosci Darboux funkcji ciągłych.)

Zadanie 20. Załóżmy, że $f : [0,1] \to [0,1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0,1]$, że $f(x) = x$. (Wsk: Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.)